ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 4

ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОРНЕЙ УРАВНЕНИЙ С ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

4.1. ЦЕЛЬ РАБОТЫ

Сформировать у студентов представление о применении уравнений в различных областях деятельности, привить знания об основных этапах решения уравнения, выработать навыки использования различных методов для уточнения корня уравнения.

4.2. ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

1. Изучить теоретическую часть. Выполните задания, соответствующие номеру Вашего варианта, и продемонстрируйте их преподавателю.

2. Оформите отчет по лабораторной работе, который должен содержать:

- титульный лист;
- исходные данные варианта;
- решение задачи;
- результаты решения задачи.

4.3. МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ

Пример 4.1.

Решить уравнение $x^2 - \sin x - 1 = 0$ методом половинного деления с точностью 0,001 (промежуток изоляции корня [1,4; 1,5]).

Решение.

1. Создайте файл Func.m (листинг 4.1), содержащий описание функции $y = x^2 - \sin x - 1$.

Листинг 4.1. Файл Func.m.

```
function z=Func(x)
z=x.^2-sin(x)-1;
```

2. Создайте файл Div2.m (листинг 4.2), содержащий описание функции, возвращающей значение корня уравнения методом половинного деления.

Листинг 4.1. Файл Div2.m.

```
function Div2(f,x1,x2,esp);
% f - Имя m-файла, содержащего описание функции
% x1 - Левая граница отрезка, на котором производится поиск решения
% x2 - Левая граница отрезка, на котором производится поиск решения
% eps - Точность решения
L=x2-x1;
k=0;
% k - счетчик количества итераций
while L>esp
    c=(x2+x1)/2;
    k=k+1;
    if feval(f,c)*feval(f,x1)<0
```

```
    % feval(f,c) - оператор вычисления в точке x=c значения
    % функции, описание которой находится в соответствуюшем файле.
    % Имя файла хранится в строковой переменной f
        x2=c;
    else
        x1=c;
    end;
    L=x2-x1;
end;
x=c
k
fx=feval(f,c)
% fx - значение невязки
```

3. Вычислите значение корня уравнения

```
>> Div2('Func',1.4,1.5,0.001)
x =
    1.4102
k =
     7
fx =
    0.0014
```

Ответ: решение *x*=1,4102 мы получили с точностью 0,001 за семь итераций. При этом значение невязки fx = 0,0014.

Пример 4.2.

Решить уравнение $x^2 - \sin x - 1 = 0$ методом итераций с точностью 0,001 (промежуток изоляции корня [1,4; 1,5]).

Решение.

1. Создайте файл Func.m (листинг 4.3), содержащий описание функции $y = x^2 - \sin x - 1$.

Листинг 4.3. Файл Func.m.

```
function z=Func(x)
z=x.^2-sin(x)-1;
```

2. Создайте файл Func1.m (листинг 4.4), содержащий описание функции $f1(x, m, f) = x - m \cdot f(x)$.

Листинг 4.4. Файл Func1.m.

```
function z=Func1(x,m,f)
z=x-m*feval(f,x);
```

3. Создайте файл Func2.m (листинг 4.5), содержащий описание функции $f2 = 1 - m \cdot f'(x)$.

Листинг 4.4. Файл Func2.m.

```
function z=Func2(x,m,f)
dx=10^-7;
x1=x+dx;
tmp1=x-m*feval(f,x);
tmp2=x1-m*feval(f,x1);
```

```
z=abs((tmp2-tmp1)/dx);
```

4. Постройте графики функций $f1$, $f2$ (рис. 4.1).

```
>> x=1.4:0.001:1.5;
>> m=0.1;
>> plot(x,Func1(x,m,'Func'));
>> hold on
>> plot(x,Func2(x,m,'Func'),'--'); grid on
```

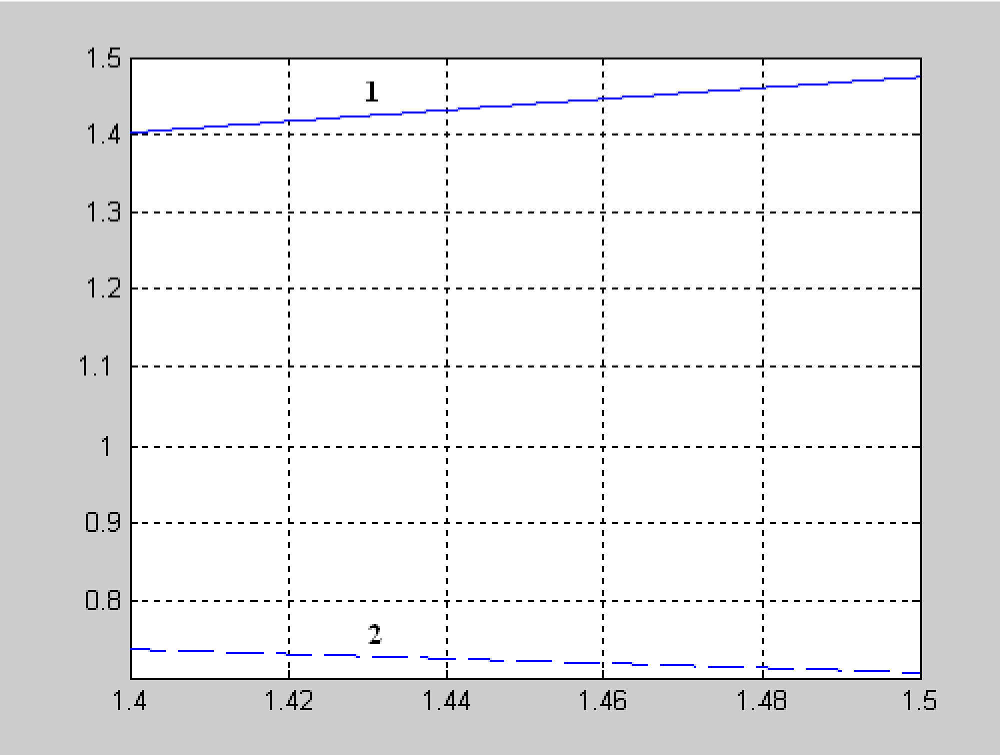

Рис. 4.1. Графики функций $f(x) = x - mF(x)$ - **1** и $f'(x) = 1 - mF'(x)$ - **2**.

Из рис. 4.1 видно, что в промежутке [1,4; 1,5] функция удовлетворяет условиям теоремы:

Пусть уравнение $x = f(x)$ имеет единственный корень на отрезке $[a; b]$ и выполнены условия:

1. $f(x)$ определена и дифференцируема на $[a; b]$.
2. $f(x) \in [a; b]$ для всех $x \in [a; b]$.
3. Существует такое действительное q, что $|f'(x)| \le q < 1$ для всех $x \in [a; b]$.

Тогда итерационная последовательность $x_n = f(x_{n-1})$ (n=1, 2, …) сходится при любом начальном приближении $x_0 \in [a; b]$.

5. Создайте файл Iter.m (листинг 4.5), содержащий описание функции, возвращающей значение корня уравнения методом итераций.

Листинг 4.5. Файл Iter.m.

```
function Iter(f,x0,esp,m)
x1=Func1(x0,m,f);
k=1;
while abs(x1-x0)>esp
    x0=x1;
    x1=Func1(x0,m,f);
```

```
    k=k+1;
end;
x=x1
k
fx=feval(f,x1)
```

6. Вычислите значение корня уравнения:

```
>> Iter('Func',1.4,0.001,0.1)
x =
    1.4076
k =
     5
fx =
   -0.0055
```

Ответ: решением уравнения будет число x=1,4076, полученное на 5 шаге. Значение невязки fx = -0.0055.

Пример 4.3.

Решить уравнение $x^2 - \sin x - 1 = 0$ методом касательных с точностью 0,001 (промежуток изоляции корня [1,4; 1,5]).

Решение.

1. Создайте файл Func.m (листинг 4.6), содержащий описание функции $y = x^2 - \sin x - 1$.

Листинг 4.6. Файл Func.m.

```
function z=Func(x)
z=x.^2-sin(x)-1;
```

2. Создайте файл Func1.m (листинг 4.7), содержащий описание первой производной функции $f'(x) = 2x - \cos x$.

Листинг 4.7. Файл Func1.m.

```
function z=Func1(x)
z=2*x-cos(x);
```

3. Создайте файл Func2.m (листинг 4.8), содержащий описание второй производной функции $f''(x) = 2 + \sin x$.

Листинг 4.8. Файл Func2.m.

```
function z=Func2(x)
z=2+sin(x);
```

4. Создайте файл Nuton.m (листинг 4.9), содержащий описание функции, возвращающей значение корня уравнения методом касательных.

Листинг 4.9. Файл Nuton.m.

```
function Nuton(f,f1,f2,a,b,esp)
if feval(f,a)*feval(f2,a)>0
    x0=a;
else
    x0=b;
end;
x1=x0-feval(f,x0)/feval(f1,x0);
k=1;
```

```
while abs(x1-x0)>esp
    x0=x1;
    x1=x0-feval(f,x0)/feval(f1,x0);
    k=k+1;
end;
x=x1
k
fx=feval(f,x1)
```

5. Вычислите значение корня уравнения:

```
>> Nuton('Func','Func1','Func2', 1.4,1.5,0.001)
x =
    1.4096
k =
     3
fx =
  1.4191e-010
```

Ответ: решение x=1,4096 мы получили с точностью 0,001 за 3 итераций. При этом значение невязки fx =1.4191e-010.

Пример 4.4.

Решить уравнение $x^2 - \sin x - 1 = 0$ методом секущих с точностью 0,001 (промежуток изоляции корня [1,4; 1,5]).

Решение.

1. Создайте файл Func.m (листинг 4.10), содержащий описание функции $y = x^2 - \sin x - 1$.

Листинг 4.10. Файл Func.m.

```
function z=Func(x)
z=x.^2-sin(x)-1;
```

2. Создайте файл Func2.m (листинг 4.11), содержащий описание второй производной функции $f''(x) = 2 + \sin x$.

Листинг 4.11. Файл Func2.m.

```
function z=Func2(x)
z=2+sin(x);
```

3. Создайте файл Hord.m (листинг 4.12), содержащий описание функции, возвращающей значение корня уравнения методом хорд.

Листинг 4.12. Файл Hord.m.

```
function Hord(f,f2,a,b,esp)
if feval(f,a)*feval(f2,a)>0
    xf=a;
    x0=b;
else
    xf=b;
    x0=a;
end;
x1=x0-feval(f,x0)*(x0-xf)/(feval(f,x0)-feval(f,xf));
k=1;
```

```
while abs(x1-x0)>esp
    x0=x1;
    x1=x0-feval(f,x0)*(x0-xf)/(feval(f,x0)-feval(f,xf));
    k=k+1;
end;
x=x1
k
fx=feval(f,x1)
```

5. Вычислите значение корня уравнения:

```
>> Hord('Func','Func2',1.4,1.5,0.001)
x =
    1.4096
k =
     2
fx =
 -6.0203e-005
```

Ответ: корень уравнения по методу хорд равен 1,4096 с точностью 0,001, найденный на втором шаге. При этом значение невязки fx =-6.0203e-005.

Решение алгебраических и трансцендентных уравнений в среде MATLAB осуществляется с помощью следующих встроенных функций: `solve()`, `fzero()`.

Функция `solve( )` представляется в следующим виде:

```
solve('f(x) ', x)
```

где:

- ✓ `'f(x)'` – решаемое уравнение, записанное в одиночных кавычках;
- ✓ `x` – искомое неизвестное.

Пример 4.5.

Пусть необходимо решить следующее уравнение:

$$x^2 - \sin x - 1 = 0\,.$$

Программа решения уравнения имеет вид:

```
>> solve('x^2-sin(x)-1=0')
```

После нажатия клавиши <Enter> получим следующее решение:

```
ans =
 1.409624
```

Функция `fzero( )` имеет следующую реализацию:

```
[x, f, e_flag, inform] = fzero('f(x) ', x0)
```

где:

- ✓ `x` – искомое неизвестное;
- ✓ `f` – значение невязки;
- ✓ `e_flag` – переменная, знак которой свидетельствует о наличии корня на данном интервале (например, `e_flag=1` – корень существует);
- ✓ `inform` – содержит три поля с именами `iterations` (количество итераций), `funcCount` (количество обращений к функции `f(x)`), и `algorithm` (наименование алгоритма, использованного для нахождения корня;
- ✓ `'f(x)'` – решаемое уравнение, записанное в одиночных кавычках;

✓ `x0` – начальное приближение или интервал поиска решения.

Пример 4.6.
Необходимо найти корни уравнения

$$y = x^2 - \sin x - 1,$$

если известно, что корни находятся в промежутках [-1, 0] и [1, 2].
Решение:

```
>> [x,f,e_flag,inform]=fzero('x^2-sin(x)-1',[-1, 0])
x =
   -0.6367
f =
     0
e_flag =
     1
inform =
    iterations: 8
    funcCount: 8
    algorithm: 'bisection, interpolation'

>> [x,f,e_flag,inform]=fzero('x^2-sin(x)-1',[1, 2])
x =
    1.4096
f =
  -1.1102e-016
e_flag =
     1
inform =
    iterations: 10
     funcCount: 10
     algorithm: 'bisection, interpolation'
```

4.4. ПРИМЕРНЫЕ ВОПРОСЫ НА ЗАЩИТЕ РАБОТЫ

1. Что называется корнем уравнения?
2. Что значит решить уравнение?
3. Каковы этапы решения уравнения с одной переменной?
4. Какие существуют методы решения уравнения с одной переменной?
5. Суть метода половинного деления.
6. Суть метода хорд. Графическая интерпретация метода.
7. Суть метода касательных. Графическая интерпретация метода.
8. Суть метода итерации.
9. Каковы достаточные условия сходимости итерационного процесса при решении уравнения $x=f(x)$ на отрезке $[a, b]$, содержащего корень, методом простой итерации?
10. Какое условие является критерием достижения заданной точности при решении уравнения $x=f(x)$ методом хорд, касательных, итераций?
11. Записать формулу нахождения значений последовательности при решении уравнения методом: хорд, касательных.
12. Как строится итерационная последовательность точек при решении уравнения методом простой итерации?

4.5. ЗАДАНИЕ

Используя варианты и результаты лабораторной работы №3 выполнить следующие задания:

1. Решить уравнение методами половинного деления, итераций, секущих и касательных с точностью 0,001.
2. Вывести на печать приближенное значение корня, количество итераций, значение невязки.
3. Провести сравнительную характеристику методов.
4. Решить уравнение в среде MATLAB с помощью встроенных функций.